REVISTA PERSPECTIVAS

VOLUMEN 7, N°1 / ENERO - JUNIO 2025 / e - ISSN: 2661

DOI: https://doi.org/10.47187/perspectivas.7.1.241

METODOLOGÍA PARA MEDIR LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN TIEMPO REAL DE SISTEMAS DINÁMICOS EN OPERACIÓN

Methodology for Measuring the Real-Time Transfer Function of Dynamic Systems in Operation

Carlos García Díaz [1]	carlos.garciadiad@alumno.buap.mx
María del Carmen Santiago Díaz [1]	marycarmen.santiago@correo.buap.mx
Ana Claudia Zenteno Vázquez [1]	ana.zenteno@correo.buap.mx
Judith Pérez Marcial [1]	judith.perez@correo.buap.mx
Raúl Antonio Aguilar Vera [2]	gustavo.rubin@correo.buap.mx
Gustavo Trinidad Rubín Linares [1]	avera@correo.uady.mx

[1] Facultad de Ciencias de la Computación, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

[2] Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México.

RESUMEN

Este artículo presenta una metodología sólida para poder medir la función de transferencia de un sistema dinámico en operación mediante la aplicación de una señal delta como entrada. La respuesta impulsiva de los sistemas se analiza en el dominio de Laplace, así permitiéndonos obtener información clave sobre su comportamiento, estabilidad y desempeño. Se propone un enfoque comparativo entre la función de transferencia nominal y su medida para detectar los fallos o deficiencias, evaluando las métricas como lo son el margen de ganancia y fase. Además, se utiliza un análisis en el dominio de la frecuencia para poder identificar las alteraciones en la dinámica del sistema. Esta metodología resulta útil para realizar el diagnóstico y mantenimiento de sistemas de control, mejorando su confiabilidad y robustez ante las variaciones operativas y fallos estructurales del sistema.

Palabras Clave: Función de Transferencia, Sistemas Dinámicos, Señal Delta, Respuesta Impulsiva, Análisis en Frecuencia, Estabilidad del Sistema, Diagnóstico de Fallos, Control Robusto, Identificación de Sistemas, Perturbaciones

ABSTRACT

This paper presents a robust methodology to measure the transfer function of a dynamic system in operation by applying a delta signal as input. The impulse response of the systems is analyzed in the Laplace domain, thus allowing us to obtain key information about their behavior, stability, and performance. A comparative approach is proposed between the nominal transfer function and its measurement to detect faults or deficiencies, evaluating metrics such as gain margin and phase. In addition, a frequency domain analysis is used to identify alterations in the system dynamics. This methodology is useful for diagnosing and maintaining control systems, improving their reliability and robustness against operational variations and structural failures of the system.

Keywords: Transfer Function, Dynamic Systems, Delta Signal, Impulse Response, Frequency Analysis, System Stability, Fault Diagnosis, Robust Control, System Identification, Disturbances

Fecha de Recepción: 15/02/2025. **Fecha de Aceptación:** 20/03/2025 **Fecha de Publicación:** 28/05/2025

I. Introducción

En el campo de la ingeniería de control y la teoría de sistemas computacionales, la función de transferencia es una de las herramientas primordiales para poder modelar y analizar el comportamiento dinámico de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Esta es la representación matemática, que relaciona la entrada y la salida de un sistema en el dominio de la frecuencia, permitiendo a los ingenieros predecir la

respuesta del sistema ante diversos estímulos y así poder diseñar estrategias de control eficientes [1].

Sin embargo, uno de los principales desafíos en la práctica es la presencia de diversas perturbaciones externas o internas, las cuales pueden alterar de manera significativa el comportamiento del sistema y, por lo consiguiente, la precisión del modelo basado en la función de transferencia [2].

Las perturbaciones, ya sean de origen ambiental, instrumental o inherentes al proceso, agregan cierta incertidumbre en el sistema, lo que nos puede llevar a diversas discrepancias entre el modelo teórico y el comportamiento real del sistema.

Este fenómeno es particularmente crítico en aplicaciones donde se requiere mucha precisión debido a que son aplicaciones de alto riesgo, como por ejemplo el control de aeronaves, sistemas de energía o procesos industriales complejos, donde incluso pequeñas desviaciones pueden tener consecuencias significativas [3]. El comprender cómo las perturbaciones afectan la función de transferencia y, en consecuencia, el modelo del sistema es un problema de gran relevancia tanto teórica como práctica [4].

En diversos artículos de investigación, se han propuesto diversas metodologías para abordar este desafío, desde técnicas de robustez y control adaptativo hasta algunos enfoques basados en la identificación de sistemas en presencia de ruido. Por ejemplo, en algunos artículos se analiza el impacto de perturbaciones estocásticas en la estabilidad de sistemas lineales [6], mientras en otros se propone un método para compensar perturbaciones en sistemas no lineales utilizando controladores sumamente más robustos [7].

Nuestro artículo busca contribuir a cerrar esta brecha mediante un análisis sistemático de los efectos de las perturbaciones en la función de transferencias y su influencia en la precisión y confiabilidad del modelo.

El objetivo principal de este trabajo es investigar cómo la introducción de las perturbaciones en un sistema altera su función de transferencia y, en consecuencia, su modelo dinámico. Para esto, se propone un marco teórico que nos permite cuantificar estos cambios y se representan estudios de caso que ilustran la magnitud de las desviaciones en diversos escenarios. Los resultados obtenidos no solo nos enriquecen en la comprensión teórica del problema, sino que también proporcionan más herramientas prácticas para el diseño de sistemas de control más robustos y resilientes.

II. Marco Teórico

La función de transferencia es una de las herramientas matemáticas más fundamentales en la teoría de control y sistemas dinámicos. En donde se representa la relación entre la entrada y la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) en el dominio de la frecuencia. Para un sistema continuo, la función de transferencia G(s) se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida Y(s) y la transformada de Laplace de la entrada U(s), bajo la suposición de condiciones iniciales nulas [1]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad (1)$$

En la Ec. 1. Podemos observar que la representación es particularmente útil debido a que nos permite analizar las propiedades clave del sistema, como la estabilidad, la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia, sin necesidad de resolver ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo [2]. Además, la función de transferencia nos facilita el diseño de controladores mediante técnicas como el lugar geométrico de las raíces y el análisis de Bode [3].

Sin embargo, la función de transferencia tiene algunas limitaciones inherentes. Particularmente, asume que el sistema es lineal, invariante en el tiempo y no está sujeto a perturbaciones externas o internas. Estas suposiciones se cumplen rara vez en aplicaciones prácticas, lo que nos lleva a una discrepancia entre el modelo teórico y el comportamiento real del sistema [4].

Las perturbaciones son señales no deseadas que afectan principalmente el comportamiento de un sistema dinámico. Es posible clasificarlas en dos categorías principales: perturbaciones determinísticas y perturbaciones estocásticas. Donde las perturbaciones determinísticas son señales predecibles que son posibles de modelarse matemáticamente, algunos ejemplos comunes incluyen señales escalón, rampa y sinusoidal. Estas perturbaciones suelen estar asociadas a cambios abruptos en las condiciones de operación, como variaciones en la carga de un motor o fluctuaciones en la temperatura de un proceso industrial [5].

Las perturbaciones estocásticas son señales aleatorias que no son posibles de predecir con certeza, por ejemplo, el ruido blanco, ruido térmico y las vibraciones aleatorias. Estas perturbaciones son particularmente desafiantes debido a que requieren técnicas avanzadas de modelado y control, como el filtrado de Kalman o el control robusto [6].

Las perturbaciones pueden afectar al sistema de diversas maneras. En primer lugar, es posible que puedan alterar la función de transferencia efectiva de nuestro sistema, lo que lleva a un comportamiento impredecible. En segundo lugar, pueden excitar modos no modelados del sistema, lo que puede resultar en inestabilidad o en la degradación del desempeño [7]. Por último, las perturbaciones pueden introducir errores en la medición de la salida del sistema, lo que nos complica el diseño de las estrategias del control basadas en la retroalimentación [8].

Una de las propiedades críticas en el diseño de los sistemas de control es la robustez. Donde hacemos referencia a la capacidad de un sistema para mantener su desempeño ante la presencia de diversas incertidumbres y perturbaciones. Dentro del contexto de la función de transferencia, la robustez se evalúa mediante las siguientes métricas como es el margen de ganancia y el margen de fase, los cuales indican cuánto puede variar el sistema antes de volverse inestable [9].

El margen de ganancia es el factor por el cual se puede multiplicar la ganancia del sistema antes de que este llegue a ser inestable. Un margen de ganancia alto indica que el sistema puede tolerar grandes variaciones en la ganancia sin perder estabilidad. Mientras que el margen de fase es el ángulo de fase adicional que se puede agregar al sistema antes de que este se vuelva inestable.

Un margen de fase alto nos indica que el sistema puede tolerar retardos o desfases sin perder estabilidad. Además de que ya tenemos estas métricas clásicas, se han desarrollado técnicas avanzadas para evaluar la robustez, como el análisis de valores singulares y la síntesis H_∞.

Estas técnicas nos permiten realizar el diseño de controladores que garanticen un desempeño aceptable incluso en presencia de perturbaciones e incertidumbres [10].

Cuando los sistemas están sujetos a perturbaciones, su función de transferencia efectiva puede verse alterada de manera significativa. Por ejemplo, las perturbaciones aditivas en la entrada de los sistemas modifican la relación entrada-salida, lo que nos da como resultado una función de transferencia aparente $G'(s)$ diferente del nominal $G(s)$. Este cambio puede llevar a ciertos errores en la predicción del comportamiento del sistema y, en algunos casos extremos, a la inestabilidad del sistema [11].

Tabla 1
TÉCNICAS DE MITIGACIÓN DE PERTURBACIONES

Técnicas de Mitigación	Descripción
Control Adaptativo	Esta técnica ajusta los parámetros del controlador en tiempo real para compensar las perturbaciones y variaciones en el sistema.
Filtrado de Perturbaciones	Utiliza filtros (por ejemplo, el filtro de Kalman) para estimar y eliminar las perturbaciones de la señal de control.
Control Robusto	Aquí se diseñan controladores los cuales garantizan el desempeño aceptable incluso en presencia de perturbaciones e incertidumbres.
Identificación de Sistemas	Utiliza datos experimentales para estimar la función de transferencia del sistema en presencia de perturbaciones. Esta técnica es útil cuando el modelo teórico del sistema no es preciso.

Además, las perturbaciones pueden llegar a afectar los polos y ceros de la función de transferencia, modificando así la respuesta en frecuencia del sistema. Lo cual es particularmente crítico en sistemas de control de retroalimentación, donde pequeños cambios en la función de transferencia pueden amplificarse y llevar a oscilaciones o divergencias [12].

Para abordar el problema de las perturbaciones en los sistemas de control, se han desarrollado diversas técnicas, en las cuales destacan las que se listan en la tabla 1:

Estas técnicas nos han demostrado ser efectivas en una amplia gama de aplicaciones, desde sistemas control de vuelo hasta procesos industriales complejos.

III. Metodología

La medición de la función de transferencia en un sistema dinámico en operación, se lleva a cabo aplicando una señal delta de Dirac δ(t) en la entrada al sistema. La delta δ(t) tiene propiedades que la hacen ideal para el análisis de la respuesta de un sistema. En su dominio de la frecuencia, la transformada de Laplace de una δ(t) es igual a 1, lo que además de simplificar el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI), nos permite someter a un sistema simultáneamente a un numero infinito de señales de prueba simultáneamente.

Como se muestra en la ecuación 1, un sistema en el dominio de Laplace, es un sistema representado por su función de transferencia nominal, donde:

- G(s) es la función de transferencia del sistema,
- Y(s) es la transformada de Laplace de la salida y(t),
- U(s) es la transformada de Laplace de la entrada u(t).

ya que al aplicar la señal delta δ(t) al sistema, su transformada de Laplace es U(s) = 1, lo que nos permite hacer mediciones directamente a la respuesta impulsiva del sistema. Por lo tanto, la salida del sistema en el dominio de Laplace será:

$$Y(s)=G(s)\cdot U(s)=G(s) \qquad (2)$$

Al momento de aplicar la transformada inversa de Laplace a Y(s), obtenemos la respuesta impulsiva del sistema en el dominio del tiempo, y(t). De ésta forma obtenemos la información clave sobre el comportamiento del sistema:

- Polos y ceros la cual determinan la estabilidad y dinámica del sistema,
- Tiempo de asentamiento o estado estacionario,
- Respuesta transitoria.

$$y(t)=L^{-1}\,[G(s)] \qquad (3)$$

Para poder evaluar fallo o deficiencias en el sistema, se introduce un análisis comparativo entre la función de transferencia nominal y la función de transferencia medida. Donde la desviación que encontremos entre estas dos funciones puede modelarse como en la ecuación 4.

$$\Delta G(s)=G_{real}(s)-G_{nominal}(s) \qquad (4)$$

Donde indica las alteraciones causadas por perturbaciones, fallos o degradaciones en el sistema. Si en la ecuación 4. obtenemos una gran magnitud puede ser indicativa de fallos significativos.

$$|G_{real}(jw)| - |G_{nominal}(jw)|$$

$$\angle G_{real}(jw)-\angle G_{nominal}(jw) \qquad (5)$$

La ecuación 5, nos muestra las diferencias que pueden revelar frecuencias donde el sistema tiene ciertos problemas de resonancia, amortiguamiento insuficiente o degradación.

Las métricas de desempeño nos permiten evaluar si el sistema cumple con los requisitos esperados en termino de estabilidad, robustez y capacidad de respuesta. Estas métricas se extraen del análisis de la función de transferencia y su respuesta impulsiva o en frecuencia.

El margen de ganancia mide la robustez del sistema frente a incrementos de ganancia antes de que el sistema llegue a ser inestable. Evaluamos en la frecuencia de cruce de fase (ω_ϕ), definida como la frecuencia donde nuestra fae de la función de transferencia alcanza -180°:

$$G_m = \frac{1}{|G(j\omega_\phi)|} \qquad (6)$$

Interpretando la ecuación 6 de la siguiente manera:

- Si $G_m > 1$, nos dice que el sistema es robusto a incrementos de ganancia.
- Si $G_m \approx 1$, interpretamos que el sistema está al borde de la inestabilidad.
- Si $G_m < 1$, quiere decir que el sistema es inestable.

Nuestro margen de fase nos llega a indicar la cantidad de fase adiciones que se puede perder antes de que el sistema llegue a ser inestable. En donde medimos la frecuencia de cruce de ganancia (ω_g), que es la frecuencia donde $|G(j\omega)| = 1$:

$$\phi_m = 180° + \angle G(j\omega_g) \qquad (7)$$

Interpretando la ecuación 7, observaremos que:

Un $\phi_m > 30°$ nos asegura un buen amortiguamiento y estabilidad.

Si $\phi_m \approx 0°$ nuestro sistema está cerca de ser inestable.

Mientras que $\phi_m < 0°$ nos indica inestabilidad.

La banda de paso es posible definirla como el rango de frecuencias donde el sistema responde adecuadamente (por ejemplo, cuando la ganancia permanece por encima de un nivel definido como -3dB respecto a su ganancia máxima):

$$BW=\{\omega : |\,G(j\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |G(0)|\} \qquad (8)$$

Al interpretar la ecuación 8, interpretamos que si obtenemos una banda de paso más amplia implica que el sistema puede llegar a manejar señales de mayor frecuencia sin ninguna atenuación significativa. Como también interpretamos que, si el BW es muy estrecho, nos puede indicar las deficiencias en la velocidad de respuesta.

Nuestro tiempo de establecimiento mide cuánto tarda la respuesta del sistema en permanecer dentro de un margen especifico (2% o 5%) del valor final tras una perturbación.

Para los sistemas de segundo orden, podemos realizar la siguiente estimación como se muestra en la ecuación 9,

$$T_s \approx \frac{4}{(\zeta\omega_n)} \qquad (9)$$

Donde:
- ζ es el coeficiente de amortiguamiento.
- ω_n es la frecuencia natural del sistema.

Aplicado en sistemas reales, las perturbaciones externas (d(y)) o internas (n(t)) afectan de manera significativa el desempeño del sistema. Realizando un análisis más detallado, las perturbaciones se modelan como señales adicionales en el sistema:

$$Y(s) = G(s)U(s) + D(s) \qquad (10)$$

El sistema con perturbaciones puede representarse como se muestra en la ecuación 10, donde:

- Y(s) es la salida tota,
- G(s) es la función de transferencia del sistema,
- U(s) es la entrada de control,
- D(s) es la transformada de Laplace de la perturbación.

Si las perturbaciones llegan a afectar la salida, la función de transferencia efectiva del sistema se ve modificada.

Para poder aislar el efecto de las perturbaciones, se llega a emplear la superposición lineal:

$$Y(s) = Y_{control}(s) + Y_{perturbación}(s) \tag{11}$$

Donde interpretamos ecuación 11, de la siguiente forma:

$$Y_{control}(s) = G(s)U(s)$$

$$Y_{perturbación}(s) = D(s)$$

La perturbación puede identificarse y filtrarse con técnicas de control adaptativo.

Para el dominio de la frecuencia, analizamos las perturbaciones en función de su espectro. Donde las perturbaciones $D(s)$ pueden modelarse como ruido blanco o señales sinusoidales de una baja frecuencia ($1/f$):

$$|D(j\omega)| \approx \frac{A}{\omega^{\beta}} \tag{12}$$

En la ecuación 12 nuestra variable β es dependiente del tipo de ruido:

- $\beta = 0$: Ruido blanco.
- $\beta = 1$: Ruido rosa.
- $\beta = 2$: Ruido marrón.

Para la compensación de las perturbaciones, es posible lograrlo diseñando un controlador que minimice la influencia de $D(s)$. Si nuestro sistema incluye un controlador de tipo $C(s)$, el modelo cerrado sería como el que se muestra en la ecuación 13:

$$T(s) = \frac{(G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \tag{13}$$

El principal objetivo del diseño es que $T(s)$ reduzca la sensibilidad del sistema frente a $D(s)$. En donde esto implica una alta ganancia en bajas frecuencias, para poder rechazar las perturbaciones persistentes, además, una baja ganancia en alta frecuencia para evitar la amplificación de ruido.

Aplicando estas métricas y modelos sugeridos se proporciona una herramienta teórica solida para poder diagnosticar fallos, compensar perturbaciones y garantizar el desempeño adecuado del sistema frente a condiciones reales adversas.

IV. Conclusión

Con esta metodología propuesta constituimos un enfoque integral para poder realizar mediciones en tiempo real con base de la función de transferencia de sistemas dinámicos en operación. Haciendo uso de señales delta y el análisis de respuesta en frecuencia, logramos obtener una representación más precisa del comportamiento de un sistema, incluso bajo la influencia de perturbaciones externas e incertidumbres. Con esta capacidad se nos permite no solo identificar fallos y deficiencias en los sistemas, sino también el desarrollo de estrategias de control robustas y resilientes.

VII. Referencias

[1] K. J. Åström and R. M. Murray, Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers, Princeton University Press, 2008.

[2] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, 7th ed., Pearson, 2014.

[3] S. Skogestad and I. Postlethwaite, Multivariable Feedback Control: Analysis and Design, Wiley, 2005.

[4] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, Feedback Control Theory, Macmillan, 1992.

[5] P. Ioannou and J. Sun, Robust Adaptive Control, Prentice Hall, 1996.

[6] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd ed., Prentice Hall, 2002.

[7] M. V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities," Automatica, vol. 32, no. 10,

pp. 1361–1379, 1996.

[8] Z. Gao and S. X. Ding, "State and disturbance estimator for time-delay systems with application to fault estimation and signal compensation," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 55, no. 12, pp. 5541–5551, 2007.

[9] G. F. Franklin et al., Digital Control of Dynamic Systems, 3rd ed., Prentice Hall, 1997.

[10] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," Journal of Basic Engineering, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.

[11] J. C. Doyle, "Guaranteed Margins for LQG Regulators," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 23, no. 4, pp. 756–757, 1978.

[12] L. Ljung, System Identification: Theory for the User, 2nd ed., Prentice Hall, 1999.